

## Межрегиональная олимпиада по математике

Условия задач 10 класс

1. (2 балла) Про натуральное число  $x$  сделано шесть утверждений:

$$3x > 91$$

$$x < 120$$

$$x < 27$$

$$4x > 37$$

$$2x \geq 21$$

$$x > 7$$

Известно, что только три из них верны, а три неверны. Найти  $x$ .

2. (3 балла) При каких целых  $p, q$  значение многочлена  $Q(x) = x^3 + px + q$  делится на 3 при любом целом  $x$ ?

3. (4 балла) Решите уравнение  $\frac{\sin^2 3x}{\sin^2 x} = 8 \cos 4x + \frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x}$ .

4. (4 балла) При подготовке к экзамену три школьника решали 100 задач. Каждый школьник решил по 60 задач, причем каждую задачу кто-нибудь решил. Задача считается трудной, если ее решил только один школьник. Легкой считается задача, которую решили все три школьника. Каких задач больше – легких или трудных? Насколько?

5. (5 баллов) Найдите все пары целых чисел  $(x, y)$ , для которых справедливо равенство  $x(x+1)(x+7)(x+8) = y^2$ .

6. (5 баллов) Точка  $D$  лежит на продолжении стороны  $AC$  треугольника  $ABC$ , площадь которого равна  $S$ ; при этом точка  $A$  находится между  $D$  и  $C$ . Пусть  $O$  – точка пересечения медиан треугольника  $ABC$ . Известно, что площадь треугольника  $DOC$  равна  $S_1$ . Выразите площадь треугольника  $DOB$  через  $S$  и  $S_1$ .